

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

3. osztály

1. (2 pont) Hogyan folytatnátok a megkezdett számsort? Miért?

100, 101, 103, 107, 115, ...

Adjatok kétféle indokolható folytatást!

Megoldás: Folytatható 131-gyel, mert sorrendben a számok közti különbség 1, 2, 4, 8, így a következő lehet 16-tal több a 115-nél (1 pont). Folytatható a sorozat 122-vel is, mert sorrendben a következő szám az előző számjegyeinek összegével több az előtte lévő számtól:

$$100 + 1 = 101, 101 + 1 + 1 = 103, 103 + 1 + 3 = 107, 107 + 1 + 7 = 115,$$

így a következő lehet $115 + 1 + 1 + 5 = 122$ (1 pont).

Tetszőleges más megoldás is elfogadható, ha az indoklás megfelelő hozzá.

2. (5 pont) Pisti hét darab kétjegyű számot növekvő sorrendbe írt egy papírra, majd az azonos számjegyeket azonos betűkre, a különböző számjegyeket különböző betűkre cserélte. Ezután egy másik papírra írta ugyanabban a növekvő sorrendben ezeket a kétjegyű számokat. Ezt látjátok alább.

KA, AZ, AK, OZ, EM, EZ, MI

Azonban a felírás során Pisti valamit elhibázott! Honnan lehet ezt kideríteni?

Megoldás: Az ötödik és hatodik csak akkor lehet növekvő sorrendben, ha $M < Z$ (1 pont). A második és harmadik csak akkor van helyes sorrendben, ha $Z < K$ (1 pont). Ebből adódik, hogy $M < K$ (1 pont). Viszont sorrendben az első KA szám kisebb kell legyen, mint az utolsó kétjegyű MI szám (1 pont), ami szerint $K < M$, ami nem lehetséges, hiszen korábban már kiderült, hogy M kisebb kell legyen K-nál (1 pont).

3. (16 pont) Írjátok fel a 20-at nyolc páratlan természetes szám összegeként az összes lehetséges módon! A nyolc szám között azonos összeadandók is előfordulhatnak, de olyan két felírás, amelyben az összeadandók csak sorrendjükben különböznek, nem számít különböző megoldásnak.

Megoldás: Tizenegy eltérő felírás létezik.

$$20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 13, \quad 20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 11,$$

$$20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 5 + 9, \quad 20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 7 + 7,$$

$$20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 5 + 7, \quad 20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 9,$$

$$20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 5 + 5 + 5, \quad 20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 5 + 5,$$

$$20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 7, \quad 20 = 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5,$$

$$20 = 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3.$$

1 helyes felírás: 1 pont; 2 helyes felírás: 2 pont; ...; 6 helyes felírás: 6 pont; 7 helyes felírás: 8 pont;

8 helyes felírás: 10 pont; 9 helyes felírás: 12 pont; 10 helyes felírás: 14 pont; 11 helyes felírás: 16 pont.

4. Villámkérdés (3 pont) Melyik a legkisebb pozitív egész szám, amelyben a számjegyek összege 19? Miért az?

Megoldás: A legkisebb a 199 (1 pont). Egy szám annál kisebb, minél kevesebb számjegyből áll (1 pont). A legkevesebb számjegyet akkor kell használnunk, ha azok értéke minél nagyobb, vagyis a lehetséges legtöbb 9-et tartalmazza. $19 = 9 + 9 + 1$. Az 1; 9; 9 jegyekből a legkisebb szám akkor áll elő, ha a legkisebb számjegy van elől, vagyis ez a 199 (1 pont).

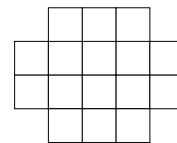
FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

4. osztály

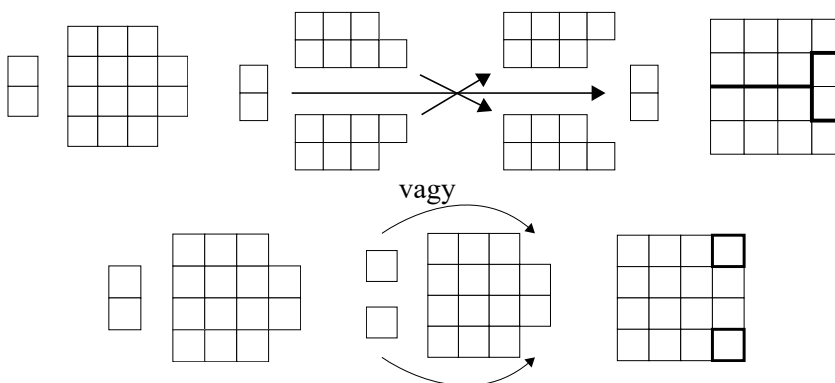
1. (2 pont) Van 50 darab aranytallérunk, ezek mindegyike 1, 3 vagy 5 talléros. Melyikből hány darab esetén fizethető ki pontosan 125 tallér, mind az 50 érme felhasználásával?

Megoldás: Nem lehetséges (1 pont). Ugyanis páros (50) darab páratlan szám összege mindig páros, míg a 125 páratlan (1 pont).

2. (5 pont) Az itt látható papírból álló alakzatot daraboljátok a rácsvonalak mentén két vágással három részre úgy, hogy utána a keletkező három részből átfedés és hézag nélküli négyzetet tudjatok kirakni!



Megoldás: 16 kis négyzetből áll az alakzat, ezért $16 = 4 \times 4$ -es négyzetet kell létrehozni (1 pont). Ez az alábbi módon lehetséges:



Ha kezdetben nem állapítják meg, hogy a mérete 4×4 -es kell legyen, de helyesen végzik az átdarabolást, akkor is jár az 5 pont.

3. (16 pont) a) Helyezzetek zárójeleket a

$$7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 = 0$$

műveletsorba úgy, hogy igaz legyen az egyenlőség!

b) Az 1 1 1 2 2 2 5 5 5 számjegyek közé beírható néhány + jel úgy, hogy a művelet végeredménye 1-re végződjön, például így: $1 + 1 + 12 + 2 + 25 + 5 + 5 = 51$.

Ugyanebbe a számsorba helyezzetek el úgy + jeleket, hogy a művelet eredménye legyen kisebb, mint 100 és 0-ra végződjön! Ahol két számjegy közé nem kerül + jel, azt egybe kell olvasni.

Megoldás: Jó válasz például:

a) $(7 - 6) - (5 - 4) - (3 - 2 - 1) = 0$ (8 pont).

b) $11 + 12 + 2 + 25 + 5 + 5 = 60$ (8 pont).

Ezekről eltérő helyes válaszokra hasonlóan adható a 8-8 pont, de alpontonként csak egyetlen helyes választ értékelünk.

4. Villámkérdés (3 pont) Hogyan folytatnátok a megkezdett sorozatot a további három taggal? Miért?

E; dzs; Dz; d; Cs; c; ...

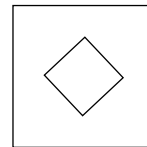
Megoldás: Nagy B, kis á és nagy A (2 pont). Mert az ábécé elejének egy szelete van fordított sorrendben (1 pont) felváltva egyszer nagy, aztán kis betűvel.

Megjegyzés: Ha nem mondják, hogy B-ből nagy betű és az á-ból kis betű, majd A-ból nagy betű következik, akkor az első 2 pontból csak 1 pont adható meg. Tetszőleges más megoldás is elfogadható, ha az indoklás megfelelő hozzá.

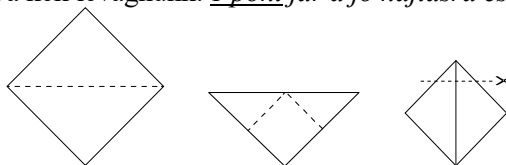
FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

5. osztály

1. (2 pont) Egy négyzet alakú papírlapot többször összehajtottunk, majd egyetlen egyenes vágással levágtunk az összehajtogatott papírból egy darabot. Amikor visszahajtogattuk, láthattuk, hogy egy négyzet alakú lyuk keletkezett a közepén az ábrának megfelelően (a két négyzet középpontja egybeesik, és a kis négyzet megfelelő oldalai párhuzamosak a nagy négyzet átlóival). Adjunk meg egy megfelelő hajtogatás- és vágáskombinációt, amely a feladatban leírtakat eredményezi. Az egyik mintadarabot megfelelően összehajtogatva vigyétek a zsűri elé és ott a zsűri előtt mutassátok be a helyes vágást és a keletkező jó eredményt! (A zsűrinél lesz olló!)



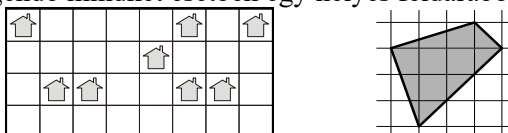
Megoldás: Sok megoldás van. Egy lehetséges a következő. Először az egyik átlója mentén félbehajtjuk és azt a két csücsöt, amelyeket ez az átló összeköt, az eredeti négyzet oldalára merőlegesen behajtjuk úgy, hogy mind a négy csücs egy helyre kerüljön. Ezután már csak a keletkezett négyzet felső sarkát (az eredeti négyzet közepét) az oldalakkal 45° -os szöget bezárva kell levágnunk. 1 pont jár a jó hajtásra és még egy pont a jó vágásért.



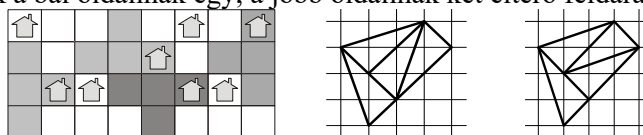
2. (5 pont) Egy 3×3 -as bűvös négyzetet az 1-től 9-ig lévő egész számokkal töltöttünk ki (minden sorban, oszlopban és a két átlóban ugyanannyi az összeg). Miért nem állhat valamelyik sarokban az 1?

Megoldás: A bűvös szám $(1 + 2 + 3 + \dots + 9) : 3 = 45 : 3 = 15$ kell legyen (1 pont). Ha valamelyik sarokban az 1 állna, akkor a hozzá tartozó sorban, oszlopban és átlóban a másik két-két szám összege 14 kellene legyen (1 pont), vagyis hat különböző szám összege $14 + 14 + 14 = 42$ (1 pont). Azonban a hat lehetséges legnagyobb összege is csak $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 39$ (1 pont), tehát nem lehetséges, hogy 1 álljon valamelyik sarokban (1 pont).

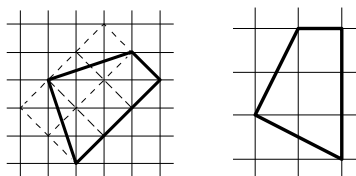
3. (16 pont) A balra látható alakzatot daraboljátok fel a rácsvonalak mentén 8 azonos alakú és nagyságú részre úgy, hogy minden részben 1 házikó legyen! A jobbra látható alakzatot pedig daraboljátok fel négy azonos alakú és nagyságú részre! Elegendő mindkét esetben egy helyes feldarabolást lerajzolnotok.



Megoldás: Alább láthatunk a bal oldalinak egy, a jobb oldalának két eltérő feldarabolását.



Mindkét alakzat helyes feldarabolása 8-8 pontot ér. A jobb oldali esetében csak egy darabolásra adunk pontot. A jobbra lévő két feldarabolást az alábbi vonalak segítségével fejthettük meg, amit elforgatva így is nézhetünk:



4. Villámkérdés (3 pont) Tegyetek a

$$** + ** + ** = 296$$

egyenlőségbe a *-ok helyére egy-egy számjegyet úgy, hogy igaz legyen az egyenlőség! A különböző helyen álló csillagok helyére írhattok ugyanolyan vagy különböző számjegyet is.

Megoldás: Ha mindhárom összeadandó kétjegyű szám első jegye nem 9, akkor az összeg kevesebb volna 290-nél (1 pont). $9* + 9* + 9* = 296$ viszont csak akkor teljesül, ha az egyesek helyén két helyen 9 és egy helyen 8 áll, vagyis $99 + 99 + 98 = 296$ (2 pont).

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

6. osztály

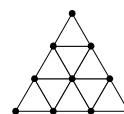
1. (2 pont) Töltsetek ki egy 4×4 -es négyzetrácsot egész számokkal úgy, hogy az összes szám összege pozitív legyen, de bármelyik 3×3 -as részben a számok összege negatív legyen. Adjatok két eltérő megoldást! Két megoldást eltérőnek tekintünk, ha az egyik táblázat tartalmaz olyan számot, amit a másik nem.

Megoldás: Két jó példa látható itt. Bármilyen helyes 4×4 -es táblázatra 1-1 pont jár.

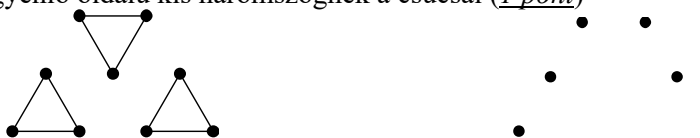
6	6	6	6
6	-10	-10	6
6	-10	-10	6
6	6	6	6

5	5	5	5
5	-8	-8	5
5	-8	-8	5
5	5	5	5

2. (5 pont) Az itt látható egyenlő oldalú kis háromszögeknek megjelöltük a 10 csúcsát. Ezen 10 csúcs közül legkevesebb hánynak a törlésével érhető el az, hogy ne legyen a megmaradtak közül három, melyek egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai legyenek?

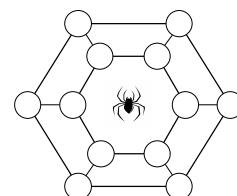


Megoldás: Nyilvánvaló, hogy a legnagyobb háromszög egyik csúcsát le kell törölni (1 pont). Az ezt követően marad 9 pont, három egyenlő oldalú kis háromszögnek a csúcsai (1 pont)

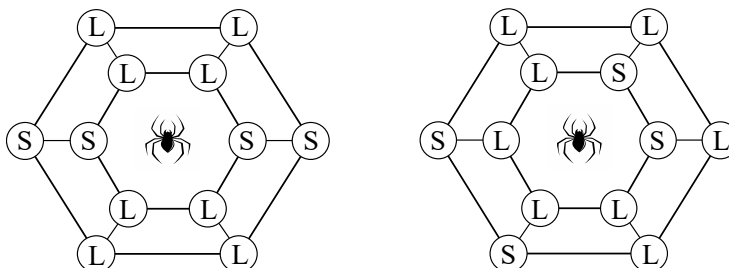


ezért ezek mindegyikéből egyet-egyet, vagyis még legalább három csúcsot törölni kell (1 pont). Amennyiben az ábra közepében lévő, valamint az alsó sorban lévő két középsőt töröljük, a fent jobbra látható megmaradtak közül semelyik három sem lesz egy egyenlő oldalú háromszög három csúcsa (1 pont). Így legkevesebb 4 csúcsponot kell törölni (1 pont).

3. (16 pont) A pók az itt látható hálón szedte össze a csomópontokban lévő rovarokat. Kiderült, hogy minden csomópontban csak egy légy vagy egy szúnyog volt, és bármelyik rovarnak pontosan két légy volt a szomszédja (két rovar akkor szomszédos, ha e két csomópont között van megrajzolt vonal). Rajzoljatok le két ilyen lehetséges eltérő elhelyezkedést! Amelyik csomópontban légy található, írjatok L betűt, a szúnyog helyére pedig S betűt! Két megoldás különböző, ha forgatással nem vihetőek egymásba.



Megoldás: Két lehetséges elrendezést láthatunk alább. Egyenként 8-8 pont jár helyes megoldásonként, összesen max 16 pont.



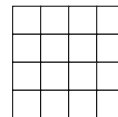
4. Villámkérdés (3 pont) Adott 10 ránézésre egyforma golyó, amelyek közül 9 azonos súlyú, egy pedig eltérő, de nem tudjuk, hogy nehezebb-e vagy könnyebb. Meg lehet-e állapítani kizárólag kétkarú mérleg segítségével 2 méréssel, hogy az eltérő nehezebb vagy könnyebb? Ha igen, hogyan, ha nem, miért?

Megoldás: Igen, meg lehet (1 pont). Először felteszünk 3-3 golyót. Ha azonos súlyúak, akkor másodjára ezekből 4-et mérünk össze a lent maradt 4-gyel és eldől a kérdés (1 pont). Ha különbözőek, akkor amelyik lehúzza a mérleget, azzal szemben a lent maradt 4 egyformából 3-at teszünk. Ha most is lehúzza, akkor az eltérő nehezebb, ha most egyforma, akkor az eltérő a könnyebb (és nyilván az első mérés után levettek között kell ekkor legyen) (1 pont).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2025. NOVEMBER 29.)
FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

7. osztály

1. (2 pont) Írjátok be az egész számokat 1-től 16-ig úgy a 4×4 -es négyzetrács mezőibe (mindegyikbe egyetlen másikat), hogy bármely 2×2 -es részben a számok összege osztója legyen 34-nek!



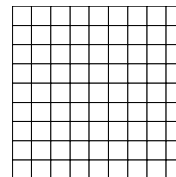
Megoldás: Egy lehetséges megoldás látható alább. (2 pont).

1	16	2	15
4	13	3	14
5	12	6	11
8	9	7	10

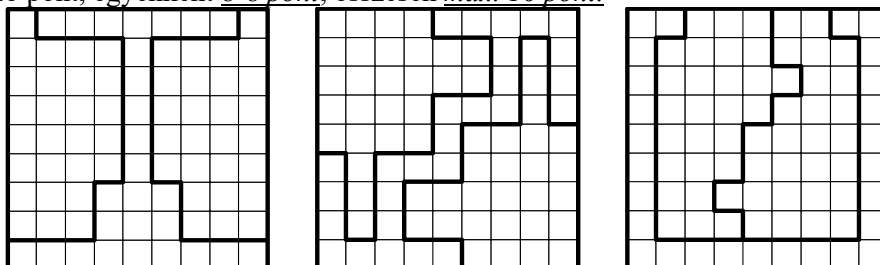
2. (5 pont) Kati két kártya mindkét oldalára egy-egy különböző (tehát összesen 4 különböző) számjegyet írt. Írhatott-e Kati négy olyan számjegyet, hogy e két kártya segítségével kirakható mindegyik kétjegyű szám prímszám legyen? (Ha valahova 6-ost írt, akkor abból elforgatással nem csinálhatunk 9-est vagy fordítva!)

Megoldás: Ha a négy hely valamelyikére a 0, 2, 4, 6, 8, vagy 5-öt írta (1 pont), akkor vagy páros vagy 5-ös végű, tehát 5-tel osztható számot nyerhetünk, amelyek egyike sem prímszám (1 pont). Így maradt az 1, 3, 7, 9 számokkal való próbálkozás. Amennyiben a 3 és a 9 különböző kártyára kerül, akkor 39 kirakható lesz, ami nem prímszám, mert osztható 3-mal (1 pont). Ha viszont azonos kártyára kerül a 3 és a 9, akkor kirakható lesz a különböző kártyákon lévő 9 és 1 segítségével a 91, ami osztható 7-tel (1 pont). Tehát nem írhatott négy olyan számjegyet, hogy a kirakható kétjegyű számok mindegyike prímszám legyen (1 pont).

3. (16 pont) Daraboljátok fel a 9×9 -es négyzetrácsot a rácsvonalak mentén három egyenlő területű részre két eltérő módon is úgy, hogy két rész területének összege legyen egyenlő a harmadik rész területével!



Megoldás: Három lehetséges feldarabolást is láthatunk alább. Összesen két helyes darabolásra adható pont, egyenként 8-8 pont, összesen max. 16 pont.



4. Villámkérdés (3 pont) El lehet-e jutni egy lóval (huszárral) a sakktábla egyik sarkából az átlellenes sarokba úgy, hogy közben minden mezőre pontosan egyszer lép rá? (A ló egy lépése olyan, hogy 2 mezőt halad egyik irányba és egyet a rá merőleges irányba.)

Megoldás: Nem lehet (1 pont). Ugyanis 63-at kellene lépnie. Azonban a sakktábla két átlellenes sarka azonos színű (1 pont), miközben a ló felváltva, sötétről világosra és világosról sötét mezőre lép, így 63 lépés után ellentétes színűre kell lépjen, mint amilyenről elindult, mivel a 63 páratlan (1 pont).

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

8. osztály

1. (2 pont) Keressétek meg azt a legnagyobb, illetve legkisebb nyolcjegyű számot, melyeknek számjegyei 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 valamilyen sorrendben, és teljesül rájuk, hogy bármely két szomszédos számjegyük összege prímszám.

Megoldás: A lehetséges nyolcjegyű számok közül a 765 kezdetűek között lehetnek a legnagyobbak, ez eddig meg is felel a feltételeknek. Az 5 utáni számjegy csak a 2 lehet, ezt követheti a 0, az 1 és a 3 is.

Ha engedünk a csábításnak, és a 3-mal folytatjuk (merthogy így kapjuk az eddig elérhető legnagyobb számot), akkor a 3 után a 0, 1, 4 marad valamilyen sorrendben, azonban ekkor vagy a 0 és a 4, vagy a 0 és az 1 egymás mellé kerülnek, ezek összege viszont nem prímszám. Tehát a 2 után 3 nem állhat.

Ha a 2 után 1-et írunk, akkor a lehető legnagyobb végződés a 430, és ez meg is felel a feltételeknek. Tehát a keresett legnagyobb szám a 76521430. (1 pont).

A lehetséges nyolcjegyű számok közül a legkisebbek 1-gyel kezdődnek. 0-val nem folytathatjuk, mert $1+0$ nem prím, ezért a szóba jöhető legkisebb folytatás a 2. Utána írhatjuk a 0-t, majd a legkisebb következő számjegyet, a 3-at, illetve utána a 4-et. A 4 után 5 és 6 nem következhet, csak a 7, ezt csak a 6-os követheti, és a legvégén az 5. Tehát a legkisebb megfelelő szám a 12034765. (1 pont). Ha csak helyesen megadják a két számot, akkor is jár az 1-1 pont.

2. (5 pont) Fel lehet-e darabolni egy téglalapot öt nem feltétlenül egyforma egyenlő szárú háromszögre? Válaszokat indokoljátok!

Megoldás: Igen, fel lehet (1 pont). Ha a téglalap nem négyzet, akkor az alábbi módon:

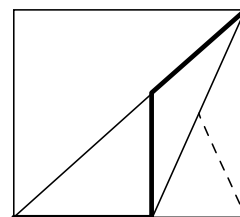
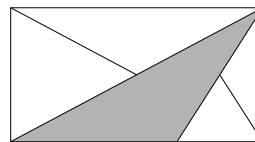
- ahol a megrajzolt átló felezőmerőlegese metszi a téglalap oldalát, ott lesz a szürke egyenlőszárú háromszög csúcsa (1 pont);

- a két világos, derékszögű háromszögnek meghúzzuk az átfogóhoz tartozó súlyvonalát (1 pont).

Ha a téglalap négyzet, akkor a következő módon járunk el:

- a 3 vastag vonalnak kell egyformának lennie (1 pont);

- a szaggatott vonal pedig az illető derékszögű háromszög súlyvonala (1 pont).

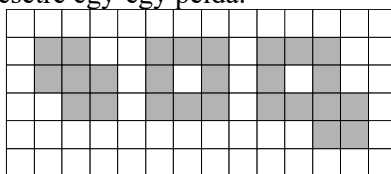


3. (16 pont) Egy festetlen négyzetrácson fessetek be

a) 7 b) 8 c) 11

mezőt úgy, hogy minden befestett mezőnek 2 vagy 4 befestett szomszédja legyen! Két mező akkor szomszédos, ha van közös oldaluk.

Megoldás: Alább látható mindhárom esetre egy-egy példa.



7

8

11

Egy eset jó ábrája 5 pontot, két eset jó ábrájára 10 pontot, mindhárom eset jó ábrája 16 pontot ér.

4. Villámkérdés (3 pont) Mi lehet a szabály? Folytassátok két számmal a sort!

1, 2, 4, 1, 8, 7, ...

Megoldás: Egy lehetséges szabály: Két szomszédos számot összetolva és hozzáadva a harmadikat, az összetolás eredményeként keletkezett szám után következő négyzetszámot kapjuk (1 pont). Ugyanis

$12 + 4 = 4^2$, $24 + 1 = 5^2$, $41 + 8 = 7^2$, $18 + 7 = 5^2$, $87 + 13 = 10^2$, a sor tehát 1, 2, 4, 1, 8, 7, 13, ..., és mivel $713 + x = 729 = 27^2$ egyenletből $x = 16$, így a sor következő két hiányzó eleme a 13 (1 pont) és a 16 (1 pont).

Más helyes szabály esetén arányosan pontozandó a megoldás.